

8 Mehrdimensionale Analysis

In diesem Kapitel behandeln wir Funktionen in mehreren Veränderlichen, speziell den Fall zweier Variablen.

Wir werden hier die Grundlagen der mehrdimensionalen Kurvendiskussion kennenlernen.

8.1 Wiederholung Teil 1

Satz 8.1. *Im Falle einer linearen Funktion (Geraden) $y = mx + b$ berechnet sich die Steigung m durch den Differenzenquotienten (vgl. 6.1)*

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wir sehen, dass die Steigung überall konstant ist.

Feststellung:

Für eine lineare Funktion ist „Steigung“ eine globale Eigenschaft.

8.2 Wiederholung Teil 2

Satz 8.2. *Im Falle einer beliebigen Funktion $y = f(x)$ berechnet sich die Steigung $f'(x)$ durch den Differentialquotienten (vgl. 6.2) an der Stelle x_0 :*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Wir sehen, dass die Steigung nun von der betrachteten Stelle x_0 abhängig ist.

Feststellung:

Für eine beliebige Funktion $f(x)$ ist „Steigung“ eine lokale Eigenschaft.

8.2.1 Funktion von zwei Veränderlichen

- . Betrachten wir nun den Graphen einer Funktion in zwei Variablen.

Wir erhalten eine Fläche im dreidimensionalen Raum.

Wir wollen uns den Spezialfall eines sogenannten „Dreikant-Prismas“ näher ansehen.

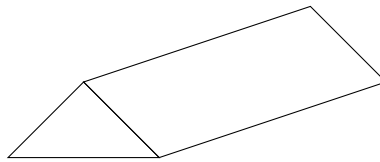


Abbildung 41: Dreikant-Prisma (Satteldach)

Wir betrachten nun also die Steigung auf einem Dach in einem festen Punkt (x_0, y_0) .

- . Stellen wir uns nun vor, ein Dachdecker bewegt sich parallel zur Dachrinne:

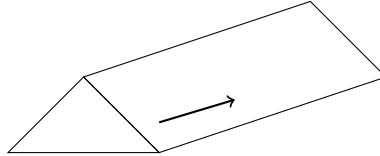


Abbildung 42: Bewegung entlang der Dachrinne

Dann ist die Steigung (in die schwarze Richtung) gleich Null.

- . Nun bewegt sich der Dachdecker auf dem direkten Weg zum First:

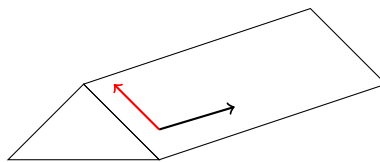


Abbildung 43: Bewegung zum Dachfirst

Dann ist die Steigung (in die rote Richtung) maximal.

. Nun bewegt sich der Dachdecker beliebig auf dem Dach:

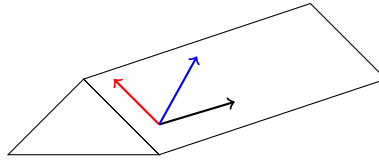


Abbildung 44: Bewegung in beliebiger Richtung

Dann ist die Steigung (in die blaue Richtung) irgendwo dazwischen.

Natürlich kann sich der Dachdecker auch nach unten bewegen, dann ist die Steigung negativ.

Feststellung:

Die Steigung ist nun nicht mehr nur von der betrachteten Stelle abhängig, sondern zusätzlich noch von der Bewegungsrichtung.

. Wir wollen nun aus der bekannten Formel der ersten Ableitung einer Funktion $f(x)$ eine Formel für eine Funktion $f(x, y)$ herstellen.

Betrachten wir noch einmal die Formel für die Steigung $f'(x)$ an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Durch Erweiterung auf eine zweite Variable y hätten wir gerne folgendes Ergebnis

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{(\Delta x, \Delta y)}$$

. Der Zähler dieses Terms ist unproblematisch, jedoch bereitet der Nenner großen Ärger, denn durch „Zahlenpaare“ $(\Delta x, \Delta y)$ kann man nicht dividieren.

Daher ist der vorstehende Term nicht definiert.

Wir umgehen dieses Problem dadurch, in dem wir eine *ceteris paribus*-Betrachtung durchführen, d. h.

wir dividieren entweder durch Δx oder durch Δy .

Das bedeutet, dass wir - unter Konstanthaltung aller übrigen Größen - immer nur eine einzige Größe variieren.

8.2.2 Ableitung von Konstanten

. Bitte erinnern Sie sich daran, wie sich konstante Terme beim Differenzieren verhalten.

(i) Konstante Summanden ergeben beim Differenzieren Null.

(ii) Konstante Faktoren bleiben beim Differenzieren erhalten (Faktorregel).

Bei der Differenzierung von Funktionen in mehreren Veränderlichen wenden wir nun die bekannten Ableitungsregeln an und beachten das oben genannte Verhalten für alle übrigen Variablen, nach denen *nicht differenziert* wird.

8.3 partielle Ableitungen erster Ordnung

Definition 8.3. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Dann definieren wir:

(i) erste partielle Ableitung von $f(x, y)$ in Richtung x :

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

(ii) erste partielle Ableitung von $f(x, y)$ in Richtung y :

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

8.3.1 Bemerkung zur Notation

. Die Notation mit dem Symbol ∂ wird häufig auch als „Del“ (Achtung: nicht Delta) gelesen.

Sie ist analog zur LEIBNIZschen Notation $\frac{dy}{dx}$ aufgebaut.

Die Reihenfolge der Faktoren im Nenner bei LEIBNIZ, genau so wie diejenige der Indizes in der NEWTONschen Notation gibt die an, in welcher Reihenfolge die Differentiation der Funktion stattfindet.

Diese ersten partiellen Ableitungen einer Funktion fasst man nun zu einem Objekt zusammen:

8.4 Gradient

Definition 8.4. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Dann definieren wir:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \nabla f(x_0, y_0)$$

heißt Gradient (oder Gradientenvektor) der Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) .

Er gibt die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion in der Stelle (x_0, y_0) an.

Die Notation $\nabla f(x_0, y_0)$ wird als „Nabla $f(x_0, y_0)$ “ gelesen. ²⁰

8.4.1 Übung zu ersten partiellen Ableitungen

Übung zu ersten partiellen Ableitungen

Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y) = x^2 + y^3$

$$f'_x(x, y) = 2x + 0$$

$$f'_y(x, y) = 0 + 3y^2$$

(ii) $f(x, y) = a \cdot x^b \cdot y^c$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$f'_x(x, y) = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot y^c$$

$$f'_y(x, y) = a \cdot c \cdot x^b \cdot y^{c-1}$$

(iii) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + xy^2 + 6y^3$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2 + 2xy + 18y^2$$

(iv) $f(x, y) = x^3 \cdot e^y$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 \cdot e^y$$

$$f'_y(x, y) = x^3 \cdot e^y$$

(v) $f(x, y) = \frac{x^2}{\sin(y)}$

$$f'_x(x, y) = \frac{2x\sin(y) - y^2 \cdot 0}{(\sin(y))^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{0 \cdot \sin(y) - x^2 \cos(y)}{(\sin(y))^2}$$

(vi) $f(x, y) = e^{x \cdot y}$

$$f'_x(x, y) = y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f'_y(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y}$$

²⁰Das Symbol ∇ wurde 1867 durch William Rowan HAMILTON (1805-1865) erstmalig verwendet. Die Bezeichnung *Nabla* wurde 1870 William Robertson Smith (1846-1894) eingeführt.

8.4.2 Bemerkung

. Sie sehen, dass die bekannten Ableitungsregeln weiterhin gelten (vgl. 6.4).

Wir wollen nun zu den Anwendungen der Ableitungen in der mehrdimensionalen Theorie kommen.

Zunächst erinnern wir uns an das „notwendige Kriterium für Extremstellen“ (vgl. 6.7):

Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$.

Besitzt die Funktion $f(x)$ in $x_0 \in D_f$ ein Maximum oder ein Minimum, so gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

. Was bedeutet dies $f'(x_0) = 0$ geometrisch ?

Sie erinnern sich hoffentlich, dass dies bedeutet, dass an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente an den Graphen der Funktion anliegt.

Im Falle einer Funktion in zwei (oder mehr) Variablen reicht die waagerechte Tangente jedoch nicht mehr als notwendige Voraussetzung für ein Extremum aus.

Im Zweidimensionalen muss an einer solchen Extremalstelle nunmehr eine waagerechte Tangentialebene existieren.

Dies wiederum ist jedoch gleichbedeutend damit, dass die ersten partiellen Ableitungen sowohl in Richtung x als auch in Richtung y verschwinden.

8.5 Notwendige Bedingung für Extremum

Satz 8.5. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Falls die Funktion $f(x, y)$ in der Stelle (x_0, y_0) ein Maximum oder ein Minimum besitzt, so gilt:

$$(i) \quad f'_x(x_0, y_0) = 0$$

oder alternativ:

und

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Beachten Sie, dass diese Bedingung notwendig,
aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines Extremums ist.

8.6 kritische Stelle

Definition 8.6. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Dann definieren wir:

Eine Stelle (x_0, y_0) mit

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

heißt kritische Stelle der Funktion.

8.6.1 Bemerkung

. Wir benötigen nun ein hinreichendes Kriterium, um die Existenz eines Extremums an der Stelle (x_0, y_0) nachzuweisen.

Aus der eindimensionalen Theorie kennen Sie ein Kriterium, um mit Hilfe der zweiten Ableitung die Existenz und den Typ des Extremums zu bestimmen.

Dies wollen wir in die zweidimensionale Theorie übertragen.

Dazu benötigen wir ein Analogon zur „zweiten Ableitung“ aus der eindimensionalen Theorie.

Wie war im Eindimensionalen die „zweite Ableitung“ definiert?

Nun, einfach als „Ableitung der ersten Ableitung“ (vgl. 6.10).

. Da nun für Funktionen in zwei Veränderlichen nicht mehr „die“ erste Ableitung sondern zwei „erste partielle“ Ableitungen existieren, erhöht sich die Anzahl der zweiten (partiellen) Ableitungen auf vier.

Denn jede der ersten partiellen Ableitungen muss wieder nach x und nach y differenziert werden.

Damit erhalten wir:

8.7 partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Definition 8.7. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen.

Dann definieren wir:

zweite partielle Ableitung in Richtung $x - x$:

$$f''_{xx}(x, y) = [f'_x(x, y)]'_x = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

zweite partielle Ableitung in Richtung $x - y$:

$$f''_{xy}(x, y) = [f'_x(x, y)]'_y = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

zweite partielle Ableitung in Richtung $y - x$:

$$f''_{yx}(x, y) = [f'_y(x, y)]'_x = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

zweite partielle Ableitung in Richtung $y - y$:

$$f''_{yy}(x, y) = [f'_y(x, y)]'_y = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

8.7.1 Übung zu zweiten partiellen Ableitungen

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

(i) $f(x, y) = x^2 + y^3$

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y) = 2x + 0 & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) = 2 \\ f'_y(x, y) = 0 + 3y^2 & \rightarrow & f''_{yy}(x, y) = 6y \end{array} \quad \begin{array}{l} f''_{xy}(x, y) = 0 \\ f''_{yx}(x, y) = 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

(ii) $f(x, y) = a \cdot x^b \cdot y^c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y) = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot y^c & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) = a \cdot b \cdot (b-1) \cdot x^{b-2} \cdot y^c \\ f'_y(x, y) = a \cdot c \cdot x^b \cdot y^{c-1} & \rightarrow & f''_{yy}(x, y) = a \cdot c \cdot (c-1) \cdot x^b \cdot y^{c-2} \end{array} \quad \begin{array}{l} f''_{xy}(x, y) = a \cdot b \cdot c \cdot x^{b-1} \cdot y^{c-1} \\ f''_{yx}(x, y) = a \cdot b \cdot c \cdot x^{b-1} \cdot y^{c-1} \end{array}$$

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

(iii) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + xy^2 + 6y^3$

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) = 6x + 6y \\ f'_y(x, y) = 3x^2 + 2xy + 18y^2 & \rightarrow & f''_{yy}(x, y) = 2x + 36y \end{array} \quad \begin{array}{l} f''_{xy}(x, y) = 6x + 2y \\ f''_{yx}(x, y) = 6x + 2y \end{array}$$

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

(iv) $f(x, y) = x^3 \cdot e^y$

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y) = 3x^2 \cdot e^y & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) = 6x \cdot e^y \\ f'_y(x, y) = x^3 \cdot e^y & \rightarrow & f''_{yy}(x, y) = x^3 \cdot e^y \end{array} \quad \begin{array}{l} f''_{xy}(x, y) = 3x^2 \cdot e^y \\ f''_{yx}(x, y) = 3x^2 \cdot e^y \end{array}$$

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

$$(v) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{\sin(y)}$$

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{2 \cdot x \cdot \sin(y)}{(\sin(y))^2} = \frac{2 \cdot x}{\sin(y)} & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) = \frac{2}{\sin(y)} & f''_{xy}(x, y) &= \frac{-2 \cdot x \cdot \cos(y)}{(\sin(y))^2} \\ f'_y(x, y) &= \frac{-x^2 \cdot \cos(y)}{(\sin(y))^2} & \rightarrow & f''_{yx}(x, y) &= \frac{-2 \cdot x \cdot \cos(y)}{(\sin(y))^2} & f''_{yy}(x, y) &= \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (\cos(y))^2}{(\sin(y))^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x, y) &= \frac{[-x^2 \cdot \cos(y)]'_y \cdot (\sin(y))^2 - (-x^2 \cdot \cos(y)) \cdot [(\sin(y))^2]'_y}{(\sin(y))^4} \\ &= \frac{[x^2 \cdot \sin(y)] \cdot (\sin(y))^2 - (-x^2 \cdot \cos(y)) \cdot [2 \cdot \sin(y) \cdot \cos(y)]}{(\sin(y))^4} \\ &= \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^3 + 2 \cdot x^2 \cdot (\cos(y))^2 \cdot \sin(y)}{(\sin(y))^4} = \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (\cos(y))^2}{(\sin(y))^3} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen:

$$(vi) \quad f(x, y) = e^{x \cdot y}$$

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y \cdot e^{x \cdot y} & \rightarrow & f''_{xx}(x, y) &= y^2 \cdot e^{x \cdot y} & f''_{xy}(x, y) &= (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y} \\ f'_y(x, y) &= x \cdot e^{x \cdot y} & \rightarrow & f''_{yx}(x, y) &= (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y} & f''_{yy}(x, y) &= x^2 \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x, y) &= [y \cdot e^{x \cdot y}]'_y \\ &= [y]'_y \cdot e^{x \cdot y} + y \cdot [e^{x \cdot y}]'_y \\ &= 1 \cdot e^{x \cdot y} + y \cdot x \cdot e^{x \cdot y} \\ &= (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned} \quad \begin{aligned} f''_{yx}(x, y) &= [x \cdot e^{x \cdot y}]'_x \\ &= [x]'_x \cdot e^{x \cdot y} + x \cdot [e^{x \cdot y}]'_x \\ &= 1 \cdot e^{x \cdot y} + x \cdot y \cdot e^{x \cdot y} \\ &= (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned}$$

8.7.2 Bemerkung

. Ihnen ist sicherlich aufgefallen, dass in allen Beispielen zwei der berechneten zweiten partiellen Ableitungen, nämlich $f''_{xy}(x, y)$ und $f''_{yx}(x, y)$ übereinstimmen.

Ist das immer der Fall?

Nein. Nicht immer, aber sehr oft.

Genaue Auskunft gibt uns der nachfolgende Satz.

8.8 Satz von H. A. SCHWARZ (1873)

Satz 8.8. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen.

Falls alle zweiten partiellen Ableitungen stetige Funktionen sind, so stimmen die „gemischten“ Ableitungen überein, also

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$



Wissenschaftler 10:
Hermann Amandus SCHWARZ, deutscher Mathematiker
(25.01.1843 Hermsdorf, Schlesien - 30.11.1921 Berlin)

8.8.1 Feststellung

. Im Rahmen unserer Vorlesung (einschließlich Klausuren und ggf. mündlicher Prüfung) gilt stets, dass

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

8.8.2 Vorbemerkung

. Wir wollen nun insbesondere das hinreichende Kriterium für Extremstellen erarbeiten.

Dazu stellen wir nun wichtige Begriffe tabellarisch gegenüber.

8.9 Eindimensional vs. Mehrdimensional

$f(x)$	Begriff	$f(x, y)$
$f'(x)$	1. (part.) Ableitung	$f'_x(x, y)$ $f'_y(x, y)$
$f'(x_0) = 0$	kritische Stelle	(a) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ (b) $f'_y(x_0, y_0) = 0$
$f''(x)$	2. (part.) Ableitung	$f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y)$ $f''_{yx}(x, y), f''_{yy}(x, y)$
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	Minimum	(a) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ (b) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (c1) $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$ (d1) $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$	Maximum	(a) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ (b) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (c1) $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$ (d2) $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
$f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$	Wendestelle	entfällt
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$	Sattelstelle	(a) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ (b) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (c2) $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) < (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) = 0$	für uns unentscheidbar	(a) $f'_x(x_0, y_0) = 0$ (b) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (c3) $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) = (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$

Tabelle 18: Gegenüberstellung Eindimensional vs. Mehrdimensional

8.9.1 Vorbemerkung zu Extrema und Sattelstelle

. Wir wollen nun die hinreichenden Kriterien für Extrema und Sattelstellen notieren.

8.10 mehrdimensionale Extremstelle

Satz 8.10. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Gilt für die Stelle (x_0, y_0)

$$(i) \quad f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

so besitzt die Funktion $f(x, y)$ in (x_0, y_0) ein lokales Minimum.

$$(ii) \quad f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

so besitzt die Funktion $f(x, y)$ in (x_0, y_0) ein lokales Maximum.

8.11 mehrdimensionale Extremstelle

Satz 8.11. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Gilt für die Stelle (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) < (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

so besitzt die Funktion $f(x, y)$ in (x_0, y_0) eine Sattelstelle.

8.12 unentscheidbare Stelle

Satz 8.12. Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion in zwei Veränderlichen und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.

Gilt für die Stelle (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) = (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

so ist dieser Fall für uns unentscheidbar.